Maestría en Estadística Aplicada
ITESM, campus Monterrey

Examen de Ubicación Tipo
Solución

Parte A

1. Es una regla que asigna a cada número, llamado x, en un subconjunto A de los reales exactamente un número, llamado f(x), en un subconjunto B de los reales. Se usa para modelar cantidades físicas, económicas, estadísticas, probabilísticas, etc., estableciendo comportamientos y tendencias.

2. Mediante una gráfica; por una fórmula; en forma tabular.

3. Es la función que deshace lo que hace la función de la que es inversa.

4. Representa la tendencia de la función f(x) al aproximarse x al número a. Es decir, el valor al que se acerca la función f(x) cuando x se acerca al número a.

5. a) Es válida si cada uno de los límites, de f(x) y g(x), existen. b) Es válida si cada uno de los límites, de f(x) y g(x), existen y además el límite de g(x) es diferente de cero.

6. Representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f(x). Representa la razón de cambio de la función f(x) con respecto a x.

7. Representa el área debajo de la función f(x), en el intervalo de a hasta b y por encima del eje horizontal. El cambio de la antiderivada de f(x) desde x = a, hasta x = b.

8. Derivando la función, igualando a cero la derivada y despejando x.

9. Si para el valor de x la suma de la serie tiende a un número definido. Si la sucesión de sumas parciales para ese valor converge.

10. $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1}$, y converge para x en el intervalo de -1 a 1.

Maestría en Estadística Aplicada
ITESM, campus Monterrey

Parte B

1.- Llamando $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = \alpha$, tenemos

$$(n-\alpha)(-1)(1-x)^{-1} + \alpha x^{-1} = 0$$

Multiplicando a ambos lados por x(1-x):

$$-(n-\alpha)x + \alpha(1-x) = 0$$

Distribuyendo y cancelando términos

$$-nx + \alpha x + \alpha - \alpha x = 0$$
$$-nx + \alpha = 0$$
$$-nx = -\alpha$$
$$nx = \alpha$$
$$x = \alpha / n$$

$$x = \left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right) / n$$

2.- a) El argumento de la función exponencial es un polinomio y su dominio son los reales. Además el dominio de la función exponencial son los reales. Por ello el dominio de la función son los reales, es decir para $x \in (-8 \ , 8 \ )$.

$$f(-2) = \frac{1}{2\sqrt{2p}} e^{\frac{-(-2-4)^2}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2p}} e^{\frac{-36}{8}} \approx 2.2159 \times 10^{-3}$$

$$f(4) = \frac{1}{2\sqrt{2p}} e^{\frac{-(4-4)^2}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2p}} \approx 0.1994$$

$$f(10) = \frac{1}{2\sqrt{2p}} e^{\frac{-(10-4)^2}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2p}} e^{\frac{-36}{8}} \approx 2.2159 \times 10^{-3}$$

b) El argumento del logaritmo natural es una función racional y existe para todos los valores de x excepto para los que el denominador es cero y esto ocurre en x = 1, entonces x?1. Pero la función logaritmo natural es válida solo para valores positivos de su argumento, entonces $(1+x)(1-x)^{-1} > 0$.

Veamos para cuales valores de x se cumple esta desigualdad.

- Supongamos que $1-x > 0 \rightarrow x<1$, entonces, multiplicando a ambos lados de la desigualdad por (1-x);

  $1+x > 0 \rightarrow x > -1$; que junto con $x < 1$, nos queda que $x \in (-1,1)$ ó $-1<x<1$

- Ahora supongamos que $1-x < 0 \rightarrow x>1$, entonces, multiplicando a ambos lados de la desigualdad por (1-x);

$1+x < 0 \rightarrow x < -1$; que junto con la desigualdad $x>1$, vemos que no hay valor de x que satisfaga ambas desigualdades.

Juntando estos resultados con que x ? 1, nos queda que el dominio de $x \in (-1,1)$ ó $-1<x<1$

$$f(-0.5) = \ln\left(\frac{1-0.5}{1-(-0.5)}\right) = -1.098$$

$$f(0) = \ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = \ln(1) = 0$$

$$f(0.5) = \ln\left(\frac{1+0.5}{1-0.5}\right) = 1.098$$

3.-

a) $$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1}{x+1} = 0.5$$

b) $$\lim_{x\longrightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Aplicando regla
de L'Hospital

c) Sea $y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$

Tomando logaritmo natural a ambos lados:

$\ln y = \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}$

$\ln y = x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$ Por propiedad de logaritmo

→ $\lim_{x\longrightarrow\infty} \ln y = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{x}}$ Forma indeterminada $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(1+\frac{a}{x})}{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{a}{x^2}\right)$ Aplicando la regla de L´Hospital

$= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{a}{1+\frac{a}{x}} = a$

Así $\lim_{x\longrightarrow\infty} \ln y = a$

→ $\ln[\lim_{x\longrightarrow\infty} y] = a$; por ser y función continua

$\lim_{x\longrightarrow\infty} y = e^a$; tomando exponencial

4.-

a) $f(t) = \frac{t}{t^2} - \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = t^{-1} - t^{-2}$

→ $f'(t) = -t^{-2} - (-2)t^{-3} = -t^{-2} + 2t^{-3}$

→ $f''(t) = -(-2)t^{-3} + 2(-3)t^{-4} = \frac{2}{t^3} - \frac{6}{t^4}$

b) $f'(t) = -\alpha (1- \beta t)^{-\alpha-1} (-\beta) = \alpha\beta (1 - \beta t)^{-\alpha-1} = \dfrac{ab}{(1-bt)^{a+1}}$

$f''(t) = -\alpha\beta(-\alpha-1)(1-\beta t)^{-\alpha-2}(-\beta) = \alpha\beta^2(\alpha+1)(1-\beta t)^{-\alpha-2} = \dfrac{a(a+1)b^2}{(1-bt)^{a+2}}$

c) $f'(t) = n[\theta e^t + (1-\theta)]^{n-1} \,.\, \theta e^t = n\theta e^t[\theta e^t + (1-\theta)]^{n-1}$

$f''(t) = n\theta e^t(n-1)[\theta e^t + (1-\theta)]^{n-2}\theta e^t + n\theta e^t[\theta e^t + (1-\theta)]^{n-1}$

$\quad = n\theta^2(n-1)e^{2t}[\theta e^t + (1-\theta)]^{n-2} + n\theta e^t[\theta e^t + (1-\theta)]^{n-1}$

5.- $f(x) = \dfrac{4z^2}{L^2}(x-x^2)$; usaremos el criterio de la 2ª. Derivada

$f'(x) = \dfrac{4z^2}{L^2}(1-2x) = 0$

$\rightarrow$ 1-2x = 0 $\rightarrow$ x = 0.5 ; punto crítico

$f''(x) = \dfrac{-8z^2}{L^2}$

$\rightarrow$ f''(0.5) < 0 , por lo tanto x= 0.5 corresponde a un máximo

6.- a) Haciendo $u = \dfrac{-x^2}{2q^2}$

$du = \dfrac{-x}{q^2}\,dx$

La integral queda -? $2e^u du = -2e^u$; sustituyendo u, la integral es:

$$-2e^{\frac{-x^2}{2q^2}}\Big|_0^{\infty} = (0 - (-2)e^0) = 2$$

b) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{\frac{-x}{q}}\,dx$

Integrando por partes:

Maestría en Estadística Aplicada
ITESM, campus Monterrey

$u = x^2$ $\qquad\qquad$ $dv = e^{\frac{-x}{q}}\,dx$

$du = 2x\,dx$ $\qquad\qquad$ $v = -\theta.\, e^{\frac{-x}{q}}$

$$\rightarrow I = -x^2\theta e^{\frac{-x}{q}}\Big|_0^\infty + 2\theta\int_0^\infty x\, e^{\frac{-x}{q}}\,dx$$

$$= 0 + 2\theta\int_0^\infty x\, e^{\frac{-x}{q}}\,dx$$

Integrando por partes nuevamente:

$u = x$ $\qquad\qquad$ $dv = e^{\frac{-x}{q}}\,dx$

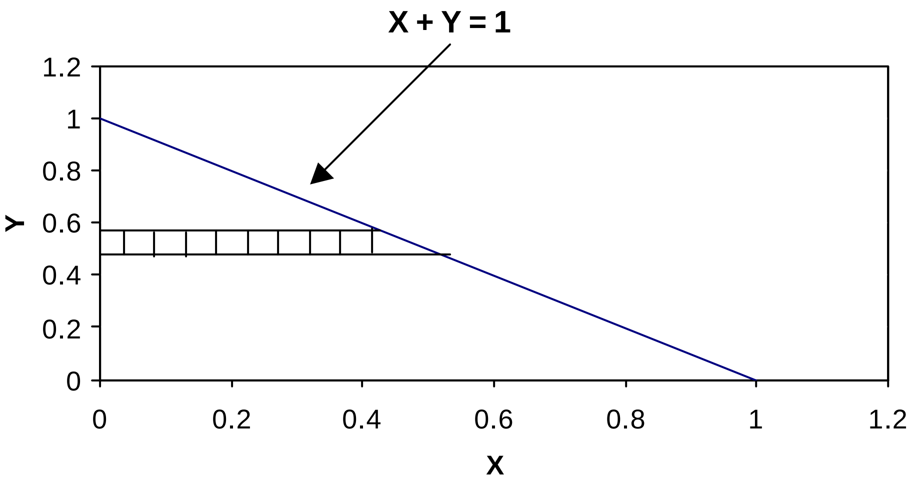
$du = dx$ $\qquad\qquad$ $v = -\theta.\, e^{\frac{-x}{q}}$

Entonces

$$I = 2\theta[-x\theta e^{\frac{-x}{q}}\Big|_0^\infty + \theta\int_0^\infty e^{\frac{-x}{q}}\,dx = 2\theta\,[\,0 + \theta(-\theta e^{\frac{-x}{q}})]\Big|_0^\infty = -2\theta^3 e^{\frac{-x}{q}}\Big|_0^\infty$$

$$= 0 - (-2\theta^3 e^0) = 2\theta^3$$

7.- La región es:



Integrando primero en x

$$I = \int_0^1\int_0^{1-y}(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Big|_0^{1-y} dy = \int_0^1\left(\frac{(1-y)^2}{2} + y(1-y)\right)dy$$

$$= -\frac{(1-y)^3}{6} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = (-0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (-\frac{1}{6} + 0 - 0) = \frac{1}{3}$$

8.- La serie de Taylor de una función f(x) (que tiene representación en serie de Taylor), alrededor de x = 0, es

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

a) Calculando f(0) y las derivadas de $f(x) = e^x$ obtenemos que valen 1:
f(0) = 1; f'(0) = 1; $f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = 1$

Así,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ ; \text{ para } x \in \Re$$

b) f(0) = ln (1) = 0

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = -\frac{-2}{(1+x)^3} \rightarrow f'''(0) = -2$$

$$f^{(IV)}(x) = -\frac{-2(-3)}{(1+x)^4} \rightarrow f^{(IV)}(0) = -3!$$

$$f^{(V)}(x) = -\frac{-2(-3)(-4)}{(1+x)^5} \rightarrow f^{(V)}(0) = -4!$$

Así,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \ ; \text{ Intervalo de convergencia } -1 < x = 1$$