

Métodos Numéricos (SC-854)

Solución de ecuaciones no lineales

© M. Valenzuela 2007-2008 (5 de mayo de 2008)
--

1. Definición del problema: raíces de ecuaciones no lineales

Dada una ecuación de una variable independiente x ,

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

se desea encontrar el valor o valores de x que hacen que se cumpla la igualdad, donde en general, f es una función no lineal de x , es decir, que no puede expresarse como $f(x) = c_0 + c_1x$ donde c_0 y c_1 son constantes. A los valores de x que hacen que se cumpla la igualdad se les denomina *raíces* de la ecuación 1.

2. Método de bisecciones sucesivas

El método de bisecciones sucesivas comienza con un intervalo $[x_1, x_2]$ donde se sabe que existe una raíz de la ecuación, y por lo tanto se debe cumplir que

$$f(x_1)f(x_2) < 0. \quad (2)$$

Este intervalo se divide a la mitad calculando

$$x_{\text{nueva}} = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (3)$$

Si $f(x_1) \cdot f(x_{\text{nueva}}) < 0$ se sabe que una raíz se encuentra en el intervalo (x_1, x_{nueva}) y se puede continuar el algoritmo sustituyendo x_2 por x_{nueva} . En caso contrario, la raíz debe caer en el intervalo (x_2, x_{nueva}) y el algoritmo puede continuarse sustituyendo x_1 por x_{nueva} . En la figura 1 se muestra un ejemplo de la forma en que trabaja el método de bisecciones sucesivas.

3. Punto fijo (iteración simple)

En el método de punto fijo, la ecuación $f(x) = 0$ se transforma a la forma $g(x) = x$, y ésta se utiliza como una regla recursiva, es decir,

$$x(t+1) = g(x(t)). \quad (4)$$

o lo que es lo mismo

$$x \leftarrow g(x) \quad (5)$$

En la figura 3 se muestra un ejemplo de la forma en que trabaja el método de punto fijo. El método de iteración simple converge a una raíz r de la ecuación $g(x) = x$ si $g(x)$ y $g'(x)$ son continuas en un intervalo alrededor de r , si

$$|g'(x)| < 1, \quad (6)$$

para todo ese intervalo, y si x_1 se escoge en ese intervalo. Nótese que ésta es una condición suficiente, pero no necesaria.

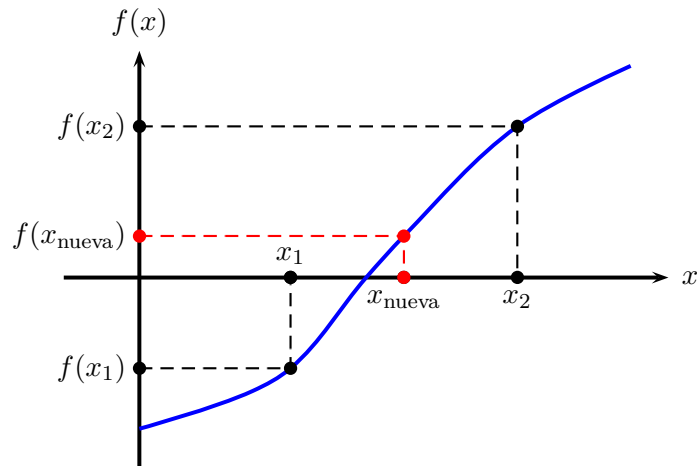


Figura 1: Método de bisecciones sucesivas.

Function Bisecciones (f, x_1, x_2)	
1	repeat
2	$x_{nueva} \leftarrow \frac{x_1 + x_2}{2}$;
3	if $f(x_1)f(x_{nueva}) < 0$ then
4	$x_2 \leftarrow x_{nueva}$;
5	else
6	$x_1 \leftarrow x_{nueva}$;
7	until $\left \frac{x_1 - x_2}{x_{nueva}} \right < \varepsilon$ ó $f(x_{nueva}) = 0$;
8	return x_{nueva}

Figura 2: Implementación en pseudocódigo del método de bisecciones sucesivas.

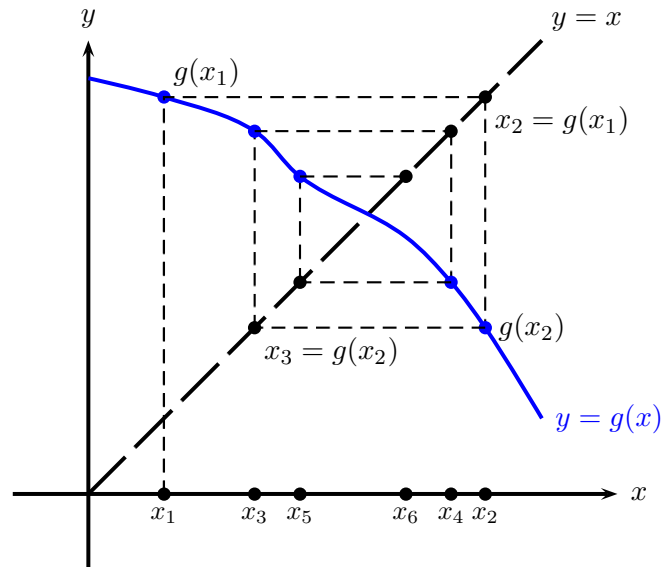


Figura 3: Método de punto fijo.

Function PFIjo(g, x)	
1	repeat
2	$x_{\text{ant}} \leftarrow x$;
3	$x \leftarrow g(x)$;
4	until $\left \frac{x - x_{\text{ant}}}{x} \right < \varepsilon$;
5	return x

Figura 4: Implementación en pseudocódigo del método de punto fijo.

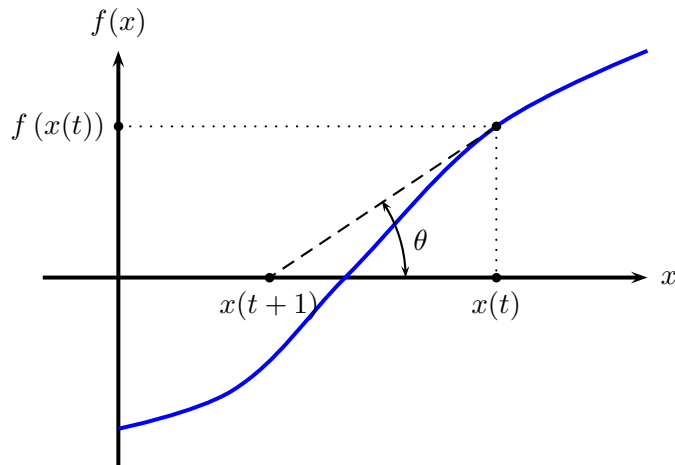


Figura 5: Explicación del método de Newton-Rapson.

4. Método Newton-Rapson

El método de Newton-Rapson se debe inicializar en un valor de x cercano a una raíz. El método asume que la función es aproximadamente lineal en ese valor y por lo tanto, toma como una mejor aproximación a la raíz un la intersección de la línea tangente a $f(x)$ y su intersección con el eje x como se muestra en la figura 5. De la figura podemos ver que

$$\tan \theta = f'(x(t)) = \frac{f(x(t))}{x(t) - x(t+1)}, \quad (7)$$

de donde obtenemos la regla recursiva

$$x(t+1) = x(t) - \frac{f(x(t))}{f'(x(t))}, \quad (8)$$

o lo que es lo mismo

$$x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (9)$$

Tomando la idea de la condición de convergencia de iteración simple, la condición para Newton-Rapson es la siguiente

$$\left| \frac{d}{dx} \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) \right| < 1, \quad (10)$$

que es equivalente a

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1 \quad (11)$$

De nuevo, ésta es una condición suficiente, pero no necesaria.

Function NewtonRapson(f, f', x)	
1	repeat
2	$x_{\text{ant}} \leftarrow x$;
3	$x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$;
4	until $\left \frac{x - x_{\text{ant}}}{x} \right < \varepsilon$;
5	return x

Figura 6: Implementación en pseudocódigo del método de Newton-Rapson.

Function Secante(f, x, x_{ant})	
1	repeat
2	$x_{\text{temp}} \leftarrow x$;
3	$x \leftarrow x - f(x) \frac{x - x_{\text{ant}}}{f(x) - f(x_{\text{ant}})}$;
4	$x_{\text{ant}} \leftarrow x_{\text{temp}}$;
5	until $\left \frac{x - x_{\text{ant}}}{x} \right < \varepsilon$;
6	return x

Figura 7: Implementación en pseudocódigo del método de la secante.

5. Método de la secante

El método Newton-Rapson requiere evaluar $f'(x)$. En el método de la secante, la derivada se aproxima de la siguiente manera:

$$f'(x(t)) \approx \frac{f(x(t-1)) - f(x(t))}{x(t-1) - x(t)} \quad (12)$$

Sustituyendo en la ecuación recursiva de Newton-Rapson se obtiene

$$x(t+1) = x(t) - f(x(t)) \frac{x(t) - x(t-1)}{f(x(t)) - f(x(t-1))}, \quad (13)$$

o lo que es lo mismo,

$$x \leftarrow x - f(x) \frac{x - x_{\text{anterior}}}{f(x) - f(x_{\text{anterior}})}. \quad (14)$$

6. Newton-Rapson para funciones de más de dos variables

El método de Newton-Rapson puede generalizarse para funciones de dos variables de la siguiente manera. Supóngase que se desea encontrar los valores de x y y que hagan que se cumplan las siguientes dos ecuaciones no lineales:

$$f(x, y) = 0; \quad (15)$$

$$g(x, y) = 0. \quad (16)$$

Dado un punto inicial $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$, el método Newton-Rapson toma los planos tangentes a $f(x, y) = z$ y $g(x, y) = z$, y su intersección con el plano $z = 0$ como el siguiente punto para continuar el método en la siguiente iteración. La ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ es la siguiente:

$$z = (x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0) + f(x_0, y_0), \quad (17)$$

donde

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (18)$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (19)$$

De la misma manera, la ecuación del plano tangente a $z = g(x, y)$ es la siguiente:

$$z = (x - x_0) g_x(x_0, y_0) + (y - y_0) g_y(x_0, y_0) + g(x_0, y_0), \quad (20)$$

donde

$$g_x = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad (21)$$

$$g_y = \frac{\partial g}{\partial y}. \quad (22)$$

Sustituyendo $z = 0$ en las ecuaciones 17 y 20 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(x - x_0) f_x + (y - y_0) f_y = -f(x_0, y_0), \quad (23)$$

$$(x - x_0) g_x + (y - y_0) g_y = -g(x_0, y_0), \quad (24)$$

donde se ha abreviado $f_x(x_0, y_0)$ como f_x , y de la misma manera para f_y , g_x , y g_y . Las ecuaciones anteriores pueden expresarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_0, y_0) \\ -g(x_0, y_0) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

donde

$$\Delta x = x - x_0, \quad (26)$$

$$\Delta y = y - y_0. \quad (27)$$

De las ecuaciones 25, 26, y 27 se obtiene la regla recursiva para el método Newton-Rapson para dos variables:

$$\begin{aligned}x &\leftarrow x + \Delta x, \\y &\leftarrow y + \Delta y.\end{aligned}$$

donde Δx y Δy se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x, y) \\ -g(x, y) \end{bmatrix}$$

El método se puede generalizar fácilmente para más de dos variables, por ejemplo, el método Newton-Rapson para un sistema de tres ecuaciones no lineales de la forma

$$f(x, y, z) = 0, \quad (28)$$

$$g(x, y, z) = 0, \quad (29)$$

$$h(x, y, z) = 0, \quad (30)$$

está definido por la regla recursiva siguiente:

$$x \leftarrow x + \Delta x, \quad (31)$$

$$y \leftarrow y + \Delta y, \quad (32)$$

$$z \leftarrow z + \Delta z, \quad (33)$$

donde Δx , Δy , Δz se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x, y, z) \\ -g(x, y, z) \\ -h(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

6.1. Ejemplo de dos variables

Encontremos una raíz del siguiente sistemas de ecuaciones no lineales:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$g(x, y) = x - y$$

Obtenemos las derivadas parciales:

$$f_x = 2x \quad f_y = 2y$$

$$g_x = 1 \quad g_y = -1$$

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^2 - y^2 + 1 \\ -x + y \end{bmatrix}$$

Tomemos $\mathbf{p}_0 = (2, 1)$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De donde $\Delta x = -1$ y $\Delta y = 0$ por lo tanto

$$\begin{aligned}x &\leftarrow x + \Delta x = 2 - 1 = 1 \\y &\leftarrow y + \Delta y = 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

Iterando obtenemos los siguientes valores:

x	2	1	0.7500	0.7083	0.7071
y	1	1	0.7500	0.7083	0.7071

Se puede comprobar que $(0.7071, 0.7071)$ es una raíz del juego de ecuaciones no lineales.

7. Raíces reales de polinomios

Un caso especial de importancia práctica es encontrar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ cuando $f(x)$ es un polinomio en x . En esta sección vemos el método Birge-Vieta que encuentra todas las raíces reales de un polinomio.

7.1. Método de Horner (división sintética)

Supóngase dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de la forma

$$P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n-i+1} \quad (35)$$

$$Q(x) = b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n = \sum_{i=1}^n b_i x^{n-i} \quad (36)$$

donde $a_1 \neq 0$. Si la relación entre $P(x)$ y $Q(x)$ está dada por

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_{n+1}, \quad (37)$$

Se tiene que $b_1 = a_1$, $b_{n+1} = P(x_0)$, y

$$b_k = a_k + b_{k-1}x_0, \quad (38)$$

para $k = 2, 3, \dots, n + 1$.

Lo anterior puede realizarse mediante una tabla de la siguiente manera

$$\begin{array}{l} x_0 \left| \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_{n+1} \\ & b_1x_0 & b_2x_0 & \cdots & b_{n-1}x_0 & b_nx_0 \\ \hline b_1 = & b_2 = & b_3 = & \cdots & b_n = & b_{n+1} = \\ & a_1 & a_2 + b_1x_0 & a_3 + b_2x_0 & \cdots & a_n + b_{n-1}x_0 & a_{n+1} + b_nx_0 \end{array} \right. \end{array}$$

El polinomio $P(x)$,

$$P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n-i+1}, \quad (39)$$

puede ser representado por el vector de sus coeficientes,

$$\mathbf{a} = \left[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \quad a_{n+1} \right]' \quad (40)$$

Function Horner (\mathbf{a}, x_0)
<pre> 1 $b_1 \leftarrow a_1$; 2 for $i \leftarrow 2$ to $n + 1$ do 3 $b_i \leftarrow a_i + b_{i-1}x_0$; 4 return $\mathbf{b}(1 : n), b_n$ </pre>

Figura 8: Pseudocódigo que implementa el método de Horner (división sintética).

de la misma manera $Q(x)$ puede ser representado por el vector $\mathbf{b}(1 : n)$

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]' \quad (41)$$

En la figura 8 se muestra el pseudocódigo del método de Horner. Este pseudocódigo se aplica la idea de representar los polinomios como vectores de sus coeficientes.

Dado que

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_{n+1}, \quad (42)$$

$$P'(x) = Q(x) + (x - x_0)Q'(x). \quad (43)$$

Por lo tanto

$$P'(x_0) = Q(x_0), \quad (44)$$

es decir, que $P'(x_0)$ puede evaluarse obteniendo el residuo de la división de $Q(x)$ por $(x - x_0)$ y evaluando $Q(x_0)$.

7.2. Ejemplo de división sintética

Si $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ y $x_0 = -2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & 0 & -3 & 3 & -4 \\ & & -4 & 8 & -10 & 14 \\ \hline & 2 & -4 & 5 & -7 & 10 \end{array}$$

de donde $P(x) = (x + 2)(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7) + 10$ y $P(-2) = 10$.

7.3. Método Birge-Vieta

Un polinomio de la forma,

$$P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i+1}, \quad (45)$$

puede ser factorizado en la forma

$$P(x) = (x - p_1)(x - p_2) \cdots (x - p_n) = \prod_{i=1}^n (x - p_i), \quad (46)$$

donde p_i es un cero (o raíz) del polinomio porque $P(p_i) = 0$.

El método Birge-Vieta aplica Newton-Rapson para encontrar una raíz del polinomio $P(x)$. Dado un punto x_k , evalúa $P(x_k)$ y $P'(x_k)$ mediante división sintética. Cuando encuentra una raíz p_i , elimina el factor $(x - p_i)$ mediante división sintética y continúa trabajando sobre el polinomio resultante. El proceso se repite hasta encontrar todas las raíces del polinomio.

7.4. Ejemplo de Birge-Vieta

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Valor inicial $x = -(-5)/6 = 0.8333$

$$\begin{array}{r|rrrr} 0.8333 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 0.8333 & -0.9722 & -4.9769 \\ \hline 0.8333 & 1 & -1.1667 & -5.9722 & 1.0231 \\ & & 0.8333 & -0.2778 & \\ \hline & 1 & -0.3333 & -6.2500 & \end{array}$$

$$x \leftarrow x - \frac{1.0231}{-6.2500} = 0.9970$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 0.9970 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 0.9970 & -1.0000 & -5.9822 \\ \hline 0.9970 & 1 & -1.0030 & -6.0000 & 0.0178 \\ & & 0.9970 & -0.0059 & \\ \hline & 1 & -0.0059 & -6.0059 & \end{array}$$

$$x \leftarrow x - \frac{0.0178}{-6.0059} = 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 0.9970 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline 0.9970 & 1 & -1 & -6.0000 & 0 \\ & & 1 & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & -6 & \end{array}$$

$$x \leftarrow x - \frac{0}{-6} = 1$$

$x = 1$ es la primera raíz.

Continuamos con el polinomio $x^2 - x - 6$. Valor inicial $x = -(-1)/(-6) = -0.1667$

$$\begin{array}{r|rrr} 0.1667 & 1 & -1 & -6 \\ & & -0.1667 & 0.1944 \\ \hline 0.1667 & 1 & -1.1667 & -5.8056 \\ & & -0.1667 & \\ \hline & 1 & -1.3333 & \end{array}$$

$$x \leftarrow x - \frac{-5.8056}{-1.3333} = -4.5208$$

$$\begin{array}{r|l} -4.5208 & 1 \quad -1 \quad -6 \\ & -4.5208 \quad 24.9588 \\ -4.5208 & 1 \quad -5.5208 \quad 18.9588 \\ & -4.5208 \\ \hline & 1 \quad -10.0417 \end{array}$$

$$x \leftarrow x - \frac{18.9588}{-10.0417} = -2.6328$$

$$\begin{array}{r|l} -2.6328 & 1 \quad -1 \quad -6 \\ & -2.6328 \quad 9.5646 \\ -2.6328 & 1 \quad -3.6328 \quad 3.5646 \\ & -2.6328 \\ \hline & 1 \quad -6.2656 \end{array}$$

$$x \leftarrow x - \frac{3.5646}{-6.2656} = -2.0639$$

$$\begin{array}{r|l} -2.0639 & 1 \quad -1 \quad -6 \\ & -2.0639 \quad 6.3237 \\ -2.0639 & 1 \quad -3.0639 \quad 0.3237 \\ & -2.0639 \\ \hline & 1 \quad -5.1278 \end{array}$$

$$x \leftarrow x - \frac{0.3237}{-5.1278} = -2.0008$$

$$\begin{array}{r|l} -2.0008 & 1 \quad -1 \quad -6 \\ & -2.0008 \quad 6.0040 \\ -2.0008 & 1 \quad -3.0008 \quad 0.0040 \\ & -2.0008 \\ \hline & 1 \quad -5.0016 \end{array}$$

$$x \leftarrow x - \frac{0.0040}{-5.0016} = -2$$

$$\begin{array}{r|l} -2 & 1 \quad -1 \quad -6 \\ & -2 \quad 6 \\ -2 & 1 \quad -3 \quad 0 \\ & -2 \\ \hline & 1 \quad -5 \end{array}$$

$$x \leftarrow x - \frac{0}{-5} = -2$$

$x = -2$ es la segunda raíz.

Seguimos con el polinomio $P(x) = x - 3$. La tercera raíz es $x = 3$.

8. Raíces complejas de polinomios

En esta sección se describe el método Lin-Bairstow encuentra todas las raíces (reales y complejas conjugadas) de un polinomio.

8.1. División sintética para binomios

Es posible deducir un algoritmo de división sintética para binomios de la siguiente manera. Supóngase dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de la forma

$$P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n-i+1} \quad (47)$$

$$Q(x) = b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} b_i x^{n-i-1} \quad (48)$$

donde $a_1 \neq 0$. Si la relación entre $P(x)$ y $Q(x)$ es dada por

$$P(x) = (x^2 - rx - s)Q(x) + b_n(x - r) + b_{n+1}, \quad (49)$$

los coeficientes b_i pueden obtenerse multiplicando e igualando los coeficientes de potencias iguales de x , de donde tenemos que

$$b_1 = a_1, \quad (50)$$

$$b_2 = a_2 + rb_1, \quad (51)$$

$$b_3 = a_3 + rb_2 + sb_1, \quad (52)$$

$$b_4 = a_4 + rb_3 + sb_2. \quad (53)$$

⋮

De lo anterior obtenemos la relación siguiente:

$$b_k = a_k + rb_{k-1} + sb_{k-2} \quad (54)$$

para $k = 3, 4, \dots, n + 1$.

La división sintética para binomios se puede implementar mediante una tabla de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} r \\ s \end{array} \left| \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\ & b_1r & b_2r & \cdots & b_{n-2}r & b_{n-1}r & b_nr \\ & & b_1s & \cdots & b_{n-3}s & b_{n-2}s & b_{n-1}s \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n & b_{n+1} \end{array} \right.$$

El método de Lin-Bairstow necesita calcular $\partial b_n / \partial r$, $\partial b_n / \partial s$, $\partial b_{n+1} / \partial r$, y $\partial b_{n+1} / \partial s$. Éstas pueden obtenerse derivando las ecuaciones 50–53, o en general la ecuación 54, de la

siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{\partial b_1}{\partial r} = 0 & \frac{\partial b_1}{\partial s} = 0 \\
 \frac{\partial b_2}{\partial r} = b_1 \equiv c_1 & \frac{\partial b_2}{\partial s} = 0 \\
 \frac{\partial b_3}{\partial r} = b_2 + rc_1 \equiv c_2 & \frac{\partial b_3}{\partial s} = b_1 = c_1 \\
 \frac{\partial b_4}{\partial r} = b_3 + rc_2 + sc_1 \equiv c_3 & \frac{\partial b_4}{\partial s} = b_2 + rc_1 = c_2 \\
 \frac{\partial b_5}{\partial r} = b_4 + rc_3 + sc_2 \equiv c_4 & \frac{\partial b_5}{\partial s} = b_3 + rc_2 = c_3 \\
 \vdots & \vdots
 \end{array}$$

donde se han definido las constantes c_i para simplificar. En general se tiene que

$$c_k = b_k + rc_{k-1} + sc_{k-2},$$

para $k = 3, 4, \dots, n+1$, y

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial b_k}{\partial r} &= c_{k-1}, \\
 \frac{\partial b_k}{\partial s} &= c_{k-2}.
 \end{aligned}$$

El proceso de calcular las derivadas requeridas por el método Lin-Bairstow puede realizarse mediante una tabla de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccccc}
 a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\
 r \left| \begin{array}{cccccccc}
 & b_1 r & b_2 r & \cdots & b_{n-3} r & b_{n-2} r & b_{n-1} r & b_n r \\
 s \left| \begin{array}{cccccccc}
 & & b_1 s & \cdots & b_{n-4} s & b_{n-3} s & b_{n-2} s & b_{n-1} s \\
 \hline
 b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & b_{n+1} \\
 r \left| \begin{array}{cccccccc}
 & c_1 r & c_2 r & \cdots & c_{n-3} r & c_{n-2} r & c_{n-1} r & \\
 s \left| \begin{array}{cccccccc}
 & & c_1 s & \cdots & c_{n-4} s & c_{n-3} s & c_{n-2} s & \\
 \hline
 c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n &
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

8.2. Lin-Bairstow

El método de Lin-Bairstow encuentra todas las raíces (reales y complejas) de un polinomio $P(x)$. Dado unos valores iniciales de r y s , realiza una división sintética de $P(x)$ por $(x^2 - rx - s)$. Utiliza el método de Newton para encontrar los valores de r y s que hagan que el residuo sea cero, es decir, encuentra las raíces del sistema de ecuaciones

$$b_n(r, s) = 0, \quad (55)$$

$$b_{n-1}(r, s) = 0. \quad (56)$$

Utilizando la regla recursiva

$$r \leftarrow r + \Delta r \quad (57)$$

$$s \leftarrow s + \Delta s \quad (58)$$

donde

$$\begin{bmatrix} c_{n-1} & c_{n-2} \\ c_n & c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_n \\ -b_{n+1} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Una vez que se encuentra un factor cuadrático de $P(x)$ se resuelve con la fórmula

$$p_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \quad (60)$$

y se continúa trabajando tomando $Q(x)$ como el nuevo polinomio $P(x)$.

8.3. Ejemplo de Lin-Bairstow

$$P(x) = x^4 - 1.1x^3 + 2.3x^2 + 0.5x + 3.3 = 0$$

Tomando como valores iniciales $s = r = -1$, la primera iteración nos da:

$$\begin{array}{r} 1 \quad -1.1 \quad 2.3 \quad 0.5 \quad 3.3 \\ -1 \left| \begin{array}{cccc} & -1.0 & 2.1 & -3.4 & 0.8 \\ & & -1.0 & 2.1 & 3.4 \end{array} \right. \\ -1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2.1 & 3.4 & -0.8 & 0.7 \\ & -1.0 & 3.1 & -5.5 & \\ & & -1.0 & 3.1 & \end{array} \right. \\ 1 \quad -3.1 \quad 5.5 \quad -3.2 \\ \quad \quad c_{n-2} \quad c_{n-1} \quad c_n \end{array} \quad \begin{array}{l} \swarrow b_{n+1} \\ \swarrow b_n \end{array}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} 5.5 & -3.1 \\ -3.2 & 5.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.7 \end{bmatrix}$$

$\Delta r = 0.11$ y $\Delta s = -0.06$.

La segunda iteración:

$$\begin{array}{r} 1 \quad -1.1 \quad 2.3 \quad 0.5 \quad 3.3 \\ -0.89 \left| \begin{array}{cccc} & -0.89 & 1.77 & -2.68 & 0.06 \\ & & -1.06 & 2.11 & -3.17 \end{array} \right. \\ -1.06 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1.99 & 3.01 & -0.07 & 0.17 \\ & -0.89 & 2.56 & -4.01 & \\ & & -1.06 & 3.05 & \end{array} \right. \\ 1 \quad -2.88 \quad 4.51 \quad -1.03 \end{array}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} 4.51 & -2.88 \\ -1.03 & 4.51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.07 \\ -0.17 \end{bmatrix}$$

$\Delta r = -0.01$ y $\Delta s = -0.04$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r &= -0.900 \\ s &= -1.100 \end{aligned}$$